

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX A

- 1.** Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot x + b$, $g(x) = m \cdot x + n$
- a) Dacă $a, b, m, n \in \mathbb{Q}$ iar $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2})$, atunci $f(x) = g(x)$ pentru orice x -număr real.
- b) Dacă $a, b, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq m$ și $b \neq n$ iar $f(2000) + f(2024) = g(2000) + g(2024)$, rezolvați ecuația $f(x) = g(x)$, în mulțimea numerelor reale.

Soluție:

a) $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) \Leftrightarrow a\sqrt{2} + b = m\sqrt{2} + n \Leftrightarrow (a - m)\sqrt{2} + b - n = 0$ 1p

Prin reducere la absurd obține $a = m$ și $b = n$, deci $f(x) = g(x)$ pentru orice x -număr real 2p

b) din relația $f(2000) + f(2024) = g(2000) + g(2024)$ obține $4024a + 2b = 4024m + 2n$ 2p

Obține $2012a + b = 2012m + n$ deci $f(2012) = g(2012)$, iar $x = 2012$ este soluție 2p

- 2.** Se consideră paralelogramul ABCD iar M este un punct astfel încât $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}$. Demonstrați că $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}$

Soluție:

Un model de rezolvare este următorul :

Din triunghiul ABM putem scrie $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$ 1p

Din triunghiul ADM putem scrie $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA}$ 1p

Prin adunare obținem $2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ (1) 1p

Deoarece ABCD este paralelogram $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 1p

Deoarece $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{MA}$, prin înlocuire în (1), obținem $-\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ 2p

Finalizare $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}$ 1p

- 3.** Numim operație împărțirea unui pătrat în patru părți egale prin drepte paralele cu ambele perechi de laturi opuse și hașurarea uneia dintre părțile rezultate. Unui pătrat de latura 1 îi aplicăm în primul pas această operație. În pasul doi fiecărui pătrat rămas nehașurat din pasul anterior îi aplicăm din nou câte o operație. În continuare, la fiecare pas, se aplică câte o operație fiecărui pătrat rămas nehașurat în pasul anterior.

- a) Asupra câtor pătrate se aplică câte o operație la pasul 5 ?
- b) Ce parte din pătratul inițial a rămas nehașurată în urma aplicării operațiilor în 2012 pași succesivi?

Soluție:

a) Prin operație fiecare pătrat este împărțit în patru pătrate și numai unul va fi hașurat, deci la fiecare pas numărul pătratelor asupra cărora se efectuează operația va fi de trei ori mai mare decât numărul pătratelor asupra cărora s-a efectuat operația la pasul anterior. 2p

Obține ca operația de la pasul 5 se aplica unui număr de 81 de pătrate 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

b) La fiecare operație aria suprafeței ramase scade cu $\frac{1}{4}$ din suprafața existentă de la pasul precedent 1p

Dacă s este aria suprafeței inițiale, atunci în urma hașurărilor vor rămâne nehasurate suprafețele $\frac{3s}{4}, \left(\frac{3s}{4}\right)^2, \left(\frac{3s}{4}\right)^3, \dots, \left(\frac{3s}{4}\right)^{2012}$. La final vom avea rămas $\left(\frac{3s}{4}\right)^{2012}$ 2p

4. Un automobil are consum diferențiat la 100 km după cum se deplasează pe drum drept, la coborâre sau la urcare astfel: pe drum drept consumul este de 7 l la 100 km, la urcare consumul este de 9 l la 100 km, iar la coborâre consumul este de 5 l la 100 km. Știind că pentru a ajunge din localitatea A în localitatea B o mașină parcurge cele trei tipuri de drum cu un consum total de 39 litri de benzină, iar pentru a ajunge din B în A mașina consumă 45 litri de benzină se cere să se determine ce distanță este între localitățile A și B.

Soluție:

Dacă a, b, c sunt distanțele (în km) parcurse pe drum drept, la urcare respectiv coborâre atunci consumul va fi:
 0,07 a – pentru parcurgerea drumului drept
 0,09 b – pentru parcurgerea drumului la urcare
 0,05 c – pentru parcurgerea drumului la coborâre 1p

Așadar vom putea scrie:

- referitor la consumul de combustibil de la A la B $0,07a + 0,09b + 0,05c = 39$ 1p

- referitor la consumul de combustibil de la B la A $0,07a + 0,05b + 0,09c = 45$ 2p

Adunând ultimele două relații obținem $0,14(a + b + c) = 84$ 2p

Se obține $a + b + c = 60$ km 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A X A

1. Se consideră numărul real $x = \frac{a+2}{2a+1}$, unde $a = \log_3 2$. Demonstrați că $a \in (0,1)$ și $x \in (1,2)$.

Soluție:

a) $3^0 < 2 < 3^1$ 1p

$0 < \log_3 2 < 1$ 1p

$a \in (0,1)$ 1p

b) $x = \frac{\log_3 2 + 2}{2\log_3 2 + 1}$ 1p

$x = \log_{12} 18$ 2p

$x \in (1,2)$ 1p

Observație: Dacă demonstrează direct $1 < \frac{a+2}{2a+1} < 2$ pentru $a \in (0,1)$ 4p

2. Fie funcția $f: A \rightarrow A$ injectivă, unde $A = \{1, 2, \dots, 100\}$.

a) Demonstrați că funcția f este surjectivă;

b) Determinați funcția f știind că $\frac{f(1)}{100} = \frac{f(2)}{99} = \dots = \frac{f(100)}{1}$.

Soluție:

a) Funcția f injectivă $\Rightarrow f(1), f(2), \dots, f(99), f(100)$ sunt distincte două câte două 1p

$\{f(1), f(2), \dots, f(100)\} = \{1, 2, \dots, 100\}$ 1p

Funcția f este surjectivă 1p

b) $\frac{f(1)}{100} = \frac{f(2)}{99} = \dots = \frac{f(100)}{1} = \frac{f(1)+f(2)+\dots+f(100)}{1+2+\dots+100} = 1$ 2p

$f(1)=100, f(2)=99, \dots, f(100)=1$ 1p

$f(x)=101-x, \forall x \in A$ 1p

3. Se consideră numărul complex $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, iar $S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n, n \in \mathbb{N}$

a) Demonstrați că $z^2 + z + 1 = 0$;

b) Determinați S_5, S_6, S_7 .

c) Demonstrați că $|S_n| \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

Obține $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1p

$z^2 + z + 1 = 0$ 1p

b) $z^3 = 1$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

Obține $S_5 = 1 + z + z^2 + z^3(1 + z + z^2) = 0$, $S_6 = 1$, iar $S_7 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ 3p

c) $S_{3k+2} = 0$, $S_{3k+1} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $S_{3k} = 1$ deci $|S_n| \in \{0, 1\}$ 1p

4. Bazinul de apă potabilă dintr-o localitate are forma unui paralelipiped dreptunghic, având drept bază un dreptunghi cu dimensiunile de 30 m , respectiv 20 m. În bazin , apa se află la înălțimea de 10 m, iar gura de evacuare a impurităților de pe suprafața apei se află la înălțimea de 11, 215 metri fata de bază. Impuritățile se elimină dacă apa este la minim 3 cm deasupra bazei gurii de evacuare. În bazin este introdus un corp cubic cu latura de 9,1 m care este așezat cu o față pe baza bazinului. Justificați dacă, în această situație, se vor elimina impuritățile de pe suprafața apei. (Se pot utiliza formulele $V_{\text{paralelipiped}} = L \times l \times h$; $V_{\text{cub}} = a^3$).

Soluție:

Obține volumul apei existente în bazin 6000 metri cubi 1p
 Deduce necesitatea ridicării apei cu încă 1, 215 m 2p
 Obține volumul necesar de apa $30 \times 20 \times 1,215 = 729$ metri cubi 1p
 Cubul cu latura de 9,1 dislocă un volum de apa de 753,571 metri cubi 1p
 Diferența de 24,571 metri cubi face ca apa sa se ridice la 4 cm deasupra gurei de evacuare,
 deci răspunsul este afirmativ 2p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XI A

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(R)$

a) Calculați $A^2(x), A^3(x)$

b) Deduceți că $A^{3n}(x) = x^n \cdot I_3, A^{3n+1}(x) = x^n \cdot A(x), A^{3n+2}(x) = x^n \cdot A^2(x), \forall n \in \mathbb{N}$

c) Dacă $B = A^{2010}(x) + A^{2011}(x) + A^{2012}(x)$, determinați valorile lui x pentru care matricea B este inversabilă ($\det B \neq 0$).

Soluție:

a) Obține $A^2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3(x) = x \cdot I_3$ 2p

b) Calculează $A^{3n}(x) = x^n \cdot I_3$, 1p

Calculează $A^{3n+1}(x) = x^n \cdot A(x), A^{3n+2}(x) = x^n \cdot A^2(x)$, 1p

c) Obține $A^{2010}(x) = x^{670} \cdot I_3, A^{2011}(x) = x^{670} \cdot A(x), A^{2012}(x) = x^{670} \cdot A^2(x), \forall n \in \mathbb{N}$ 1p

Obține $B = x^{670} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ 1p

Din condiția $\det B \neq 0$ obține $x \in R \setminus \{0, 1\}$ 1p

2. Un tablou matricial de tipul $n \times n$ este organizat numai cu elemente ale mulțimii $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dispuse astfel încât pe fiecare linie și fiecare coloană să apară toate elementele mulțimii A_n și ele să fie dispuse simetric față de diagonala principală a tabloului.

a) Pentru $n = 3$ construiți două astfel de tablouri asociate mulțimii A_3

b) Demonstrați că cele două matrice anterior construite au același determinant.

c) Pentru $n = 2013$ demonstrați că pe diagonala principală a tabloului asociat mulțimii A_{2013} apar toate elementele mulțimii A_{2013}

Soluție:

a) Doua exemple pot fi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2p

b) Calculează determinanții și verifica egalitatea 2p

c) Orice element apare în tablou de exact 2013 ori 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

Din modul de construcție a tabloului rezulta ca numărul aparițiilor în tablou, cu excepția diagonalei principale, este par 1p
 Pentru a avea 2013 apariții în tablou, în mod necesar, fiecare element apare și pe diagonala principală 1p

3. a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+12} - \sqrt{x} - 2}$

b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x + 4}{x^3 - 3x + 7} \right)^{503x^2}$

c) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, este o funcție astfel încât $|f(x) - e^x| \leq x^{2012} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, calculați $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+12} - \sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+12} + \sqrt{x} + 2)(4 - 2\sqrt{x})}{(\sqrt{x+5} + \sqrt{x} + 1)(8 - 4\sqrt{x})} = \frac{2}{3}$ 2p

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x + 4}{x^3 - 3x + 7} \right)^{503x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4x - 3}{x^3 - 3x + 7} \right)^{503x^2} = e^{2012}$ 2p

c) Obține $e^x - x^{2012} \leq f(x) \leq e^x + x^{2012} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 1p

Calculează $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x^{2012}) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x^{2012}) = 1$ 1p

Finalizare $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ 1p

Observație: Pentru alta metoda de calcul corect se acorda punctajul maxim corespunzător.

4. Fie funcțiile $f_n: \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}}, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + f_1(x) & 1 \\ 1 & 1 & 1 + f_2(x) \end{vmatrix}$ se cere :

a) Să se determine $f(x)$

b) Să se determine asimptotele la graficul funcției $f(x)$.

c) Să se determine $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k \cdot (f(x))^3$ este număr finit.

Soluție:

a) Obține $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}, f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 1p

Determina $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2(x+1)}}$ 2p

b) Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ rezulta ca dreapta $y=0$ este asimptota orizontala pentru graficul funcției f 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \infty$ obținem ca $x=-1$ este asimptota verticală pentru graficul funcției $f(x)$ 1p

Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \infty$ obținem ca și dreapta $x=1$ este asimptota verticală pentru graficul funcției f 1p

c) Obține $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k (f(x))^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{(x-1)^2(x+1)} = \text{finit} \Leftrightarrow k \in \{1, 2, 3\}$ 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A XII A

1. Se consideră mulțimea $G = \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det(A) = -1\}$

a) Să se verifice dacă matricile $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 503 & 1 \\ 2011 & -4 \end{pmatrix}$ aparțin mulțimii G.

b) Să se demonstreze că dacă $A \in G$ atunci $A^3, A^5, \dots, A^{2011} \in G$

c) Justificați dacă există matrici A și B din mulțimea G astfel încât $A \cdot B \in G$.

Soluție:

a) Obține $\det(A) = -1$, deci matricea A aparține mulțimii G 2p

Obține $\det(B) = -4023$, deci matricea B nu aparține mulțimii G 2p

b) dacă $A \in G$ atunci $\det(A) = \det(A^3) = \dots = \det(A^{2011}) = -1$, deci $A^3, A^5, \dots, A^{2011} \in G$ 2p

c) Utilizând $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ obține ca AB nu aparține mulțimii G 1p

2. a) Pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^2 + 4x$, verificați relația $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$.

Interpretați geometric rezultatul.

b) Determinați numărul real t astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + t \cdot x$ să verifice

relația $\int_0^{1006} f(x)dx = \int_{1006}^{2012} f(x)dx$

c) Să se justifice că putem construi un număr de 2012 funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_0^{1006} f(x)dx = \int_{1006}^{2012} f(x)dx$$

Soluție:

a) Obține $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$ 2p

Interpretare geometrică „Pentru $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -4x^2 + 4x$, dreapta $x = \frac{1}{2}$ împarte

subgraficul în două suprafețe de aceeași arie, fiind axa de simetrie”. 1p

b) Calculează $\int_0^{1006} f(x)dx, \int_{1006}^{2012} f(x)dx$ 2p

Obține $t = 2012$ 1p

c) Alege $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = k(-x^2 + 2012 \cdot x), k \in \mathbb{N}^*$ (sau alt exemplu corect) 1p

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 10 martie 2012
Filiera tehnologică : profil tehnic

3. Fie $M \subseteq \mathbb{C}$ o mulțime îndeplinind condițiile:

(1) $(1+i) \in M$ și

(2) pentru orice $a, b \in M \Rightarrow a \cdot b \in M$

a) Demonstrați că mulțimea $A = \{1, -1, i, -i\}$ îndeplinește condiția (2)

b) Demonstrați că $(-4) \in M$

c) Justificați dacă este posibil ca mulțimea M să aibă exact 2012 elemente.

Soluție:

a) Verifica îndeplinirea condiției (2) cu tabla operației 4p

(Dacă efectuează unele înmulțiri de tipul ab cu $a \neq b$ numai 2 puncte)

b) Aplicăm (2) pentru $a = b = 1+i$ obținând că $2i \in M$ 1p

Aplicăm (2) pentru $a = b = 2i$ obținând că $-4 \in M$ 1p

c) răspunsul este negativ deoarece puterile cu exponent natural ale numărului (-4) vor fi în M ... 1p

4. a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} ax+b, & x \leq 0 \\ \ln(x^2+1) + \arctg x, & x > 0 \end{cases}$ să fie

o primitivă a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 4x| dx$

c) Să se demonstreze că lungimea graficului funcției $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin 4x|$ este mai mare decât 4.

Soluție:

a) În mod necesar funcția F este continuă în $x=0$ și derivabilă în $x=0$ 1p

Din relația $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$ obținem $b=0$ 1p

Din condiția de derivabilitate în $x=0$ obținem $a=1$ 1p

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 4x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$ 2p

Finalizare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 4x| dx = 1$ 1p

c) Ținând cont de forma graficului funcției sinus, observăm că vom "urca și cobori" de câte două ori de la Ox la dreapta $y=1$, deci lungimea graficului este mai mare decât 4 1p